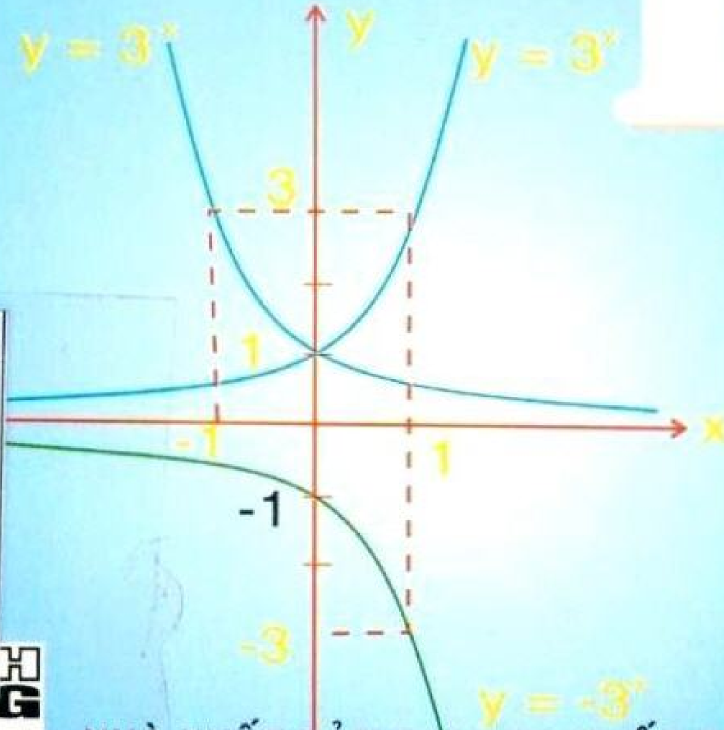
LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Đại số & Giải tích 11

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)



Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC (Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

Học và ôn tập toán
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP
TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1: Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2: Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3: Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4: Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5: Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6: Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7: Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8: Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 6 chương:

Chương I: Dãy số
Chương II: Giới hạn của hàm số
Chương III: Hàm số liên tục
Chương IV: Hàm số mũ – Hàm số logarit
Chương V: Phương trình, bất phương trình và hệ mũ
Chương VI: Phương trình, bất phương trình và hệ lôgarit

bao gồm 16 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 93 dạng toán cơ bản và nâng cao của Đại số và Giải tích 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005

NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

CHỦ ĐỀ 1

DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) là một ánh xạ từ N^* vào R:*

$$f: N^* \to R$$

Khi đó, ta có $u_n = f(n)$.

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

2. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Thí dụ 1: Dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 8n + 1$. Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được 9, 17, 25, ..., 8n + 1, ...

Cách 2: Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi, tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Thí dụ 2:

a. Dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1}, \text{ với } n \geq 2 \end{cases}$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, ...$$

Dễ thấy rằng, dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2^n$.

b. Dãy số (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1 \\ b_n = b_{n-2} + b_{n-1}, \text{ với } n \geq 3 \end{cases}$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 5, ...$$

Dãy số này được gọi là *dãy số Phibônaxi*.

Cách 3: Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.

Thí dụ 3: Cho dãy số (u_n) với u_n là chữ số thứ n trong cách viết thập phân cu số π, khi đó ta có dãy số:

$$u_1 = 3, u_2 = 1, u_3 = 4, u_4 = 1, u_5 = 5, ...$$

Trong trường hợp này ta không tìm được công thức biểu thị số hạng u_n qua n.

3. DÃY SỐ ĐƠN DIỆU

Định nghĩa 1 (*Dãy số tăng*): *Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 < u_2 < u_3 < ... < u_n < ...$

Thí dụ 4:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = 2n + 1$ là dãy số tăng.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n - 6$, dễ thấy nó không phải l dãy số tăng.

Định nghĩa 2 (*Dãy số giảm*): *Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$

Thí dụ 5:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ là dãy số giảm.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, dễ thấy nó không phải l dãy số tăng hoặc giảm.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa 3 (*Dãy số bị chặn trên*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu:*

$$\exists M \in \mathbf{R} : u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 6:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. Như vậy, dễ thấy mọi dy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n$, dễ thấy nó không bị chặn trê

Định nghĩa 4 (*Dãy số bị chặn dưới*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu:*

$$\exists m \in \mathbf{R} : u_n \ge m, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 7:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ bị chặn dưới bởi 3. Như vậy, dễ thấy mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = -n$, dễ thấy nó không bị chặn dưới.

***Định nghĩa 5** (Dãy số bị chặn): Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:*

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 8:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{n}$, ta có:

- Bị chặn trên bởi 1, vì $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- Bị chặn dưới bởi 0, vì $u_n = \frac{n-1}{n} \ge 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

b. Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.n$, không bị chặn trên và không bị chặn dưới.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với giả thiết cho dãy số (u_n) dưới dạng công thức tổng quát hoặc biểu thức truy hồi và câu hỏi thường được đặt ra là:

- Hãy viết k số hạng đầu của dãy số hoặc tìm u_k. Câu hỏi này được thực hiện bằng phép thế.
- Xác định xem a là số hạng thứ mấy của dãy số. Câu hỏi này được thực hiện bằng việc giải phương trình ẩn n.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$.

a. Tìm u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta có:

$$u_9 = \frac{(-1)^9 + 1}{9} = 0; \ u_{12} = \frac{(-1)^{12} + 1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n} + 1}{2n} = \frac{1}{n}; \ u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} + 1}{2n+1} = 0.$$

b. Từ kết quả câu a) ta thấy ngay mọi số hạng lẻ của dãy số đều nhận giá trị bằng 0.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_n = u_{n-2} - u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem -3 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta lần lượt có:

$u_1 = 15;\ u_2 = 9;\ u_3 = -6;\ u_4 = -15;\ u_5 = -9;\ u_6 = 6.$

b. Dễ thấy mọi số hạng của dãy số đều không nhận giá trị bằng -3.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

a. Viết 6 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{19}{17}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}$.

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n+1}$.

a. Tìm $u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}$.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Tìm u_4, u_8.

b. Tìm xem 11 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng minh rằng số hạng u_1 thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng u_k thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng u_{k+1} cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^3 + 11n$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Giải

Ta có: $u_1 = 1^3 + 11 = 12 \Rightarrow u_1 \vdots 6$.

Giả sử $u_k \vdots 6$, tức là $(k^3 + 11k) \vdots 6$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy: $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

$$= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12$$

suy ra $u_{k+1} \vdots 6$ bởi $(k^3 + 11k) \vdots 6$, $3k(k+1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$.

Vậy, mọi số hạng của dãy số (u_n) đều chia hết cho 6.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n < 6u_{n-2}$, $\forall n \geq 5$.

Giải

Ta có: $u_3 = 3$, $u_4 = 7$, $u_5 = 17 \Rightarrow u_5 < 6u_3$.

Giả sử công thức đúng với mọi $n \leq k$, tức là:

$$\begin{cases} u_k < 6u_{k-2} \\ u_{k-1} < 6u_{k-3} \end{cases}$$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < 6u_{k-1}$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k < 6u_{k-3} + 2.6u_{k-2} = 6(u_{k-3} + 2u_{k-2}) = 6u_{k-1}$, đpcm.

Vậy, ta luôn có $u_n < 6u_{n-2}$, $\forall n \geq 5$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Giải

Ta có: $u_1 = \sqrt{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2} \Rightarrow$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $u_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy: $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\left|\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

do $0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} > 0$.

Vậy, ta luôn có $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 13^n - 1$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n+2}$. Chứng minh rằng $u_n > 2n + 5$.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 5. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}, \text{ với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.